

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. ЗАЙЦЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
(Для студентов педагогического образования)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань – 2014

УДК 517.3

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Заседания кафедры высшей математики и математического
моделирования

Протокол №8 от 13 ноября 2014г.

Научный редактор:

доктор физико-математических наук, профессор
Игнатьев Юрий Геннадьевич

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, доцент
Сушков Сергей Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент
Голицына Ирина Николаевна

Зайцева Н.В. Математический анализ. Интегральное исчисление функции одной переменной. Учебно-методическое пособие (для студентов педагогического образования). — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014 — 33 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов профильной подготовки - «математика, информатика и информационные технологии» с направлением подготовки - педагогическое образование. Пособие включает в себя обзор теоретического материала, изучаемого в разделе «Интегральное исчисление функции одной переменной», разобранные примеры по темам курса, задания для самостоятельной работы студентов и список рекомендуемой литературы.

©Казанский университет, 2014

©Зайцева Н.В., 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
I. Неопределенный интеграл	5
I.I. Понятие неопределенного интеграла.....	5
I.II. Методы интегрирования.....	7
I.II.I. Непосредственное интегрирование.....	7
I.II.II. Метод подстановки и замены переменной.....	7
I.II.III. Метод интегрирования по частям.....	7
I.III. Интегрирование рациональных функций.....	8
I.IV. Интегрирование иррациональных функций.....	10
I.IV.I. Интегрирование квадратичных иррациональностей.....	11
I.IV.II. Интегрирование биномиального дифференциала.....	12
I.V. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.....	12
II. Определенный интеграл.....	14
II.I. Понятие определенного интеграла и его свойства.....	14
II.II. Вычисление определенного интеграла.....	15
II.II.I. Формула Ньютона–Лейбница.....	15
II.II.II. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям.....	16
II.III. Приложения определенного интеграла.....	17
III. Задания для самостоятельного выполнения.....	23
Литература.....	33

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ — важнейший базовый курс, в котором закладывается фундамент математического образования. Данная дисциплина относится к вариативной части образовательной программы профильной подготовки студентов «Математика, информатика и информационные технологии», отделения бакалавр, направления 050100.62 — Педагогическое образование. Раздел дисциплины «Интегральное исчисление функции одной переменной» является темой 4 рабочей программы дисциплины, изучается на втором курсе, в третьем семестре. На изучение данного раздела отводится 36 часов лекционных занятий, 36 часов лабораторных занятий и 54 часа на самостоятельную работу студентов, которая включает в себя повторение лекционного материала, подготовку к практическим занятиям и контрольным работам. Формой контроля самостоятельной работы является контрольная работа. После изучения данного курса студент должен знать интегральное исчисление функции одной переменной и уметь применять интегральное исчисление при решении геометрических и физических задач.

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой курса математического анализа и включает в себя следующие разделы:

- Неопределенный интеграл, его свойства и методы вычислений;
- Определенный интеграл, геометрические и физические задачи, приводящие к определенному интегралу, свойства определенного интеграла и его приложения — к вычислению площадей плоских фигур, длины дуги кривой, площадей поверхности тел, полученных вращением некоторой плоской кривой и их объемов, к вычислению статистических моментов и моментов инерции плоской пластины и координат центра тяжести материальной кривой.

В пособии изложен краткий теоретический материал, необходимый для решения задач данного курса, необходимые формулы и приведены подробно разобранные примеры. Пособие включает в себя 5 заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Неопределенный интеграл» и 5 заданий по теме «Определенный интеграл», каждое задание представлено в количестве 25 различных вариантов. В конце предложен список литературы, рекомендуемой при изучении курса.

Данное учебно-методическое пособие может быть полезным подспорьем, как для студентов, так и для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу дисциплины.

І. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

І.І. Понятие неопределенного интеграла

Основной задачей интегрального исчисления является задача по восстановлению функции по заданной первообразной.

Определение. Функция $F(x)$, заданная на множестве $x \in X$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого множества и справедлива формула

$$F'(x) = f(x).$$

Лемма. Функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда они отличаются константой

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$, заданных на множестве $x \in X$, называется *неопределенным интегралом*, который обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, а функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Определение. Процесс вычисления интеграла называется *интегрированием*.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла есть подынтегральная функция $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. Дифференциал от интеграла есть подынтегральное выражение $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, где $k \neq 0$ — const.
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Процесс дифференцирования элементарных функций не выводит из класса элементарных функций, т.е. производная от элементарной функции есть элементарная функция. Для процесса интегрирования это утверждение, вообще говоря, не верно. Приведем примеры, в которых подынтегральные функции являются элементарными, однако их первообразные

нет: $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ и $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральные синус и косинус, интегралы Френеля - $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, интегральный логарифм - $\int \frac{dx}{\ln x}$.

Таблица основных интегралов.

1. $\int 0 dx = C$.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C, |x| < 1$.
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C$.
11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.
12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.
13. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, x \neq 0$.

Некоторые интегралы, часто встречающиеся на практике.

1. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \pm 1} + C$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C$.
4. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$.
5. $\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln a^2 \pm x^2 + C$.

$$6. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$$

$$7. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

$$8. \int x^2 \pm a^2 dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \pm 1} + C.$$

Опишем основные методы интегрирования.

I. II. Методы интегрирования

I. II. I. Непосредственное интегрирование

Суть метода состоит в применении известных свойств интегралов, что непосредственно сводит их к табличным. Рассмотрим следующие примеры.

$$1). \int 3x^4 dx = 3 \int x^4 dx = \frac{3}{5} x^5 + C.$$

$$2). \int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C.$$

$$3). \int (\sin x + 5e^x) dx = \int \sin x dx + 5 \int e^x dx = -\cos x + 5e^x + C.$$

I. II. II. Метод подстановки и замены переменной

Если функция $\psi(x)$ - первообразная для функции $\varphi(x)$, т.е. $\psi'(x) = \varphi(x)$, тогда $d\psi(x) = \psi'(x)dx = \varphi(x)dx$ и справедлив метод:

$$\int F(\psi(x))\varphi(x)dx = \int F(\psi(x))d\psi(x) = \int F(t)dt,$$

где $\psi(x) = t$ - замена переменной.

Рассмотрим примеры.

$$1). \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln |\cos x| = \ln |t| + c = - \ln |\cos x| + C.$$

$$2). \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln |x-1| = \ln |t| + c = \ln |x-1| + C.$$

$$3). \int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + c = \frac{1}{2} \sin x^2 + C.$$

$$4). \int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\ln x} + C.$$

I. II. III. Метод интегрирования по частям

Метод основан на формуле:

$$\int U dV = UV - \int V dU.$$

Рассмотрим примеры на применение данного метода.

$$1). \int x e^x dx = \int U = x, dV = e^x \Rightarrow dU = dx, V = e^x \int e^x dx = e^x(x - 1) + C.$$

$$2). \int \ln x dx = \int U = \ln x, dV = dx \Rightarrow dU = \frac{dx}{x}, V = x \int x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

$$3). \int \arctg x dx = \int U = \arctg x, dV = dx \Rightarrow dU = \frac{dx}{1+x^2}, V = x \int x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

I.III. Интегрирование рациональных функций

Пусть дана рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_m}$, где $m, n \in N, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

Определение. Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если $n < m$, и неправильной, если $n \geq m$.

В случае, если подынтегральная функция — неправильная дробь, то первым шагом выделяем целую часть, а затем интегрируем эту выделенную целую часть и полученную в результате деления правильную дробь.

Определение. Правильные дроби вида: $\frac{A}{x - \alpha}$; $\frac{B}{(x - \alpha)^n}$; $\frac{Cx + D}{x^2 + px + q}$;

$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, n \in N, n \neq 1$, где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, называются *простейшими дробями*.

Интегрирование простейших дробей.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln|x - \alpha| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{B}{(x - \alpha)^n} dx = -\frac{B}{(n-1)(x - \alpha)^{n-1}} + C.$$

$$\text{III. } \frac{Cx + D}{x^2 + px + q} = \frac{C}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(D - \frac{Cp}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right).$$

$$\text{IV. } \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{M(x^2 + px + q)^{-n+1}}{2-2n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \left(\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} \right),$$

$$\text{где } t = x + \frac{p}{2}, a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

При вычислении простейших дробей вида IV используется рекуррентная формула:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Теорема. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами, такая, что знаменатель можно разложить на следующие множители:

$$Q(x) = (x - b_1)^{\alpha_1} (x - b_2)^{\alpha_2} \dots (x - b_m)^{\alpha_m}.$$

$$\cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\beta_n}.$$

Тогда эту правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - b_1} + \frac{A_2}{(x - b_1)^2} + \frac{A_3}{(x - b_1)^3} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - b_1)^{\alpha_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - b_2} + \frac{B_2}{(x - b_2)^2} + \frac{B_3}{(x - b_2)^3} + \dots + \frac{B_{\alpha_2}}{(x - b_2)^{\alpha_2}} + \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{C_1}{x - b_m} + \frac{C_2}{(x - b_m)^2} + \frac{C_3}{(x - b_m)^3} + \dots + \frac{C_{\alpha_m}}{(x - b_m)^{\alpha_m}} + \\ & + \frac{K_1x + L_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{K_2x + L_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{K_{\beta_1}x + L_{\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_nx + q_n} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_nx + q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\beta_n}x + N_{\beta_n}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{\beta_n}}. \end{aligned}$$

Теорема. Всякая рациональная дробь интегрируема, т.е. ее первообразная выражается через элементарные функции.

Пример.

Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx$.

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{(A + M)x^3 + (B + N - 2M)x^2 + (B - 2N + M)x + (-A + B + N)}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , находим неопределенные коэффициенты: $A = 2, B = 3, M = 0, N = 1$.

Тогда:

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} dx = \int \frac{2}{x - 1} dx + \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Вычислим интегралы от простейших дробей отдельно.

$$1) \int \frac{2}{x - 1} dx = 2 \int \frac{d(x - 1)}{x - 1} = 2 \ln |x - 1| + C;$$

$$2) \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx = 3 \int (x - 1)^{-2} d(x - 1) = -\frac{3}{x - 1} + C;$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

II. IV. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интеграл

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{p_n}{q_n}} \right) dx,$$

где $p_i, i = 1..n$ и $q_j, j = 1..n$ — натуральные числа, и $ad - bc \neq 0$, R — рациональная функция относительно переменной x и всех перечисленных корней.

Подстановка $\left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^s$, где $s = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ позволяет рационализировать подынтегральную функцию. Рассмотрим на примере.

Пример.

Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{1 + (x + 1)^{\frac{1}{3}}} dx$.

Решение. Используем подстановку $x + 1 = t^6$, откуда $dx = 6t^5 dt$. С помощью данной подстановки подынтегральная функция рационализируется к

виду:

$$\int \frac{1-t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = -6 \int \frac{t^8-t^5}{t^2+1} dt = -6 \int (t^6 - t^4 - t^3 + t^2 - 1 - \frac{t-1}{t^2+1}) dt =$$

$$= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(t^2 + 1) - 6 \operatorname{arctgt} + C,$$

где $t = (x+1)^{\frac{1}{6}}$.

I.IV.I. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим интеграл следующего вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Французским математиком Эйлером было установлено, что в следующих трех случаях подынтегральная функция рационализируется подстановками:

I. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = y \pm \sqrt{ax}$, если $a > 0$.

II. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$.

III. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)y$, где α — действительный корень многочлена $ax^2 + bx + c$.

С помощью данных подстановок подынтегральная функция будет представлять собой композицию рациональных функций, а, следовательно, интеграл будет берущимся.

Пример.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Решение.

Применим вторую подстановку Эйлера: $\sqrt{1 - 2x - x^2} = xy + 1$, откуда получаем $x = -2 \frac{1+y}{1+y^2}$, а $dx = 2 \frac{y^2+2y-1}{(1+y^2)^2} dy$.

После всех преобразований интеграл предстает в следующем виде:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = - \int \frac{y^2+2y-1}{(y-1)(y^2+1)} dy = - \int \frac{dy}{y-1} - 2 \int \frac{dy}{y^2+1} =$$

$$= - \ln|y-1| - 2 \operatorname{arctgy} + c, \text{ где вместо из подстановки } y = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}.$$

Также для нахождения интеграла $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можно использовать тригонометрические подстановки. Для этого нужно преобразовать квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в сумму или разность квадратов и свести интеграл к одному из следующих видов:

1. $\int R(z, \sqrt{m^2 - z^2}) dz;$

2. $\int R(z, \sqrt{m^2 + z^2}) dz;$

3. $\int R(z, \sqrt{z^2 - m^2}) dz.$

Тогда эти интегралы можно будет вычислить с помощью подстановок: $z = m \cdot \sin t$ или $z = m \cdot \operatorname{tht}$ — для первого случая, $z = m \cdot \operatorname{tgt}$ или $z = m \cdot \operatorname{sht}$ — для второго, и $z = \frac{m}{\cos t}$ или $z = m \cdot \operatorname{cht}$ — для третьего, соответственно.

Рассмотрим этот вариант на примере.

Пример.

Вычислите интеграл $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3-2x-x^2} dx &= \int \sqrt{2^2 - (x+1)^2} dx = \lambda x + 1 = 2 \sin t \lambda = \\ \int \sqrt{4-4\sin^2 t} 2 \cos t dt &= 4 \int \cos^2 t dt = 2 \int 1 + \cos 2t dt = 2t + \sin 2t + C = \\ &= 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + C.\end{aligned}$$

I.IV.II. Интегрирование биномиального дифференциала

Определение. Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$ называется *биномиальным дифференциалом*, где $m, n, p \in \mathbb{Q}$ (в случае, когда m, n, p одновременно являются целыми, подынтегральная функция является рациональной).

Подстановки П.Л. Чебышева для интегрирования биномиального дифференциала:

I. Если p — целое число, а m, n — не целые, т.е. $x^{\frac{p_1}{q_1}}(a+bx^{\frac{p_2}{q_2}})^p dx$, то рационализирует интеграл подстановка $x = z^n$, где $n = (q_1, q_2)$.

II. Если p — не целое число, а $\frac{m+1}{n}$ — целое, то интеграл рационализирует подстановка $a+bx^n = z^s$, где s — знаменатель дроби p .

III. Если p — не целое число, а $\frac{m+1}{n} + p$ — целое, то используем подстановку $ax^{-n} + b = z^s$, где s — знаменатель дроби p .

Пример.

Вычислите интеграл $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2} dx$.

Решение.

Преобразуем интеграл к виду:

$$\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2} dx = \int x^{-1}(1+2x^{-1})^{\frac{1}{2}} dx,$$

после чего видно, что $p = \frac{1}{2}$ — не целое число, а $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{1} = 0$ — целое.

Применим вторую подстановку: $1+2x^{-1} = z^2$, откуда находим $x = \frac{2}{z^2-1}$
 $dx = -\frac{4z}{(z^2-1)^2} dz$. Тогда:

$$\begin{aligned}\int x^{-1}(1+2x^{-1})^{\frac{1}{2}} dx &= -2 \int \frac{z^2}{z^2-1} dz = -2 \left(\int dz + \int \frac{dz}{z^2-1} \right) = \\ &= -2z + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| + C = -2\sqrt{1+2x^{-1}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+2x^{-1}}+1}{\sqrt{1+2x^{-1}}-1} \right| + C.\end{aligned}$$

I.V. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

Подстановка вида $tg \frac{x}{2} = t$ рационализирует интеграл, содержащий тригонометрические функции, поэтому она называется *универсальной*. Согласно данной подстановке:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Рассмотрим пример на применение универсальной подстановки.

Пример.

Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$.

Решение.

С помощью универсальной подстановки интеграл приводится к виду:

$$\int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(t + \frac{1}{3})}{(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}} \right) + c = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{3tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right).$$

Рассмотрим частные случаи, когда подынтегральная функция рационализируется с помощью других, более простых подстановок.

1. Если подынтегральная функция является нечетной относительно функции $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует интеграл подстановка $t = \cos x$.

2. Если подынтегральная функция является нечетной относительно функции $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует интеграл подстановка $t = \sin x$.

3. Если подынтегральная функция является нечетной относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует интеграл подстановка $t = tg x$.

Интегралы вида $\int \sin nx \sin mx dx$, $\int \sin nx \cos mx dx$, $\int \cos nx \cos mx dx$ вычисляются с помощью применения тригонометрических формул преобразования произведения в сумму. А интегралы вида $\int \sin^{2n} \alpha x dx$, $\int \cos^{2m} \beta x dx$ вычисляются с помощью формул понижения степени.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4}) dx}{\sin^2(x + \frac{\pi}{4})} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{d \cos(x + \frac{\pi}{4})}{1 - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4}) + 1}{\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin 6x + c.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx = \\ &= -\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| + c = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Приемы интегрирования гиперболических функций аналогичны приемам интегрирования тригонометрических функций. Напомним некоторые основные формулы:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1, 2shx \cdot chx = sh2x,$$

$$sh^2 x = \frac{1}{2}(ch2x - 1), ch^2 x = \frac{1}{2}(ch2x + 1).$$

Пример 4.

$$\int ch^2 x dx = \frac{1}{2} \int ch2x + 1 dx = \frac{1}{4} sh2x + \frac{x}{2} + C.$$

Пример 5.

$$\int ch^3 x dx = \int ch^2 x d(shx) = \int (1 + sh^2 x) d(shx) = shx + \frac{sh^3 x}{3} + C.$$

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

II.1. Понятие определенного интеграла и его свойства

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, под которой будем понимать плоскую фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ — непрерывная функция, и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных, несамопересекающихся отрезков: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$. На отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k , из которой восстановим перпендикуляр до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Тогда площадь полученного прямоугольника равна $f(\xi_k)\Delta x_k$, $triangle x_k = x_k - x_{k-1}$. Прделаем данную процедуру для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Из построения ступенчатой фигуры видно, что ее площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \approx S. \text{ Обозначим через } \lambda = \max\{\Delta x_k\}.$$

Определение. Сумма вида $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$, построенная для функции $y = f(x)$ называется *интегральной суммой*.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$, то говорят, что функция $y = f(x)$ *интегрируема по Риману*, а предельное значение интегральных сумм называется *определенным интегралом* и обозначается:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

a, b — соответственно обозначают нижний и верхний пределы интегрирования.

Из вышесказанного делаем вывод, что определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции. Это есть геометрическая интерпретация понятия определенного интеграла.

Физический смысл определенного интеграла: если $y = f(x)$ есть функция скорости неравномерно движущегося тела в зависимости от времени x , то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой значение пути, пройденного телом за время $x = b - a$.

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^b dx = b - a, a < b.$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$5. \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \text{ для } \forall c \in R.$$

6. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по любому составляющему данного отрезка.

7. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и точка c — такая, что $a < c < b$, то справедлива формула $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (свойство аддитивности по отрезку).

Теорема. "О среднем значении функции". Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что значение функции в этой точке равно $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Геометрическая интерпретация "теоремы о среднем": существует промежуточная точка $c \in [a, b]$ такая, что площадь прямоугольника, построенного на основании $[a, b]$ с высотой равной $f(c)$, равно площади криволинейной трапеции с тем же основанием и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$: $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

II. II. Вычисление определенного интеграла.

II. II. I. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках $x \in [a, b]$, и функция $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

II. II. II. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема. Если

- 1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
 - 2) $[a, b]$ — множество значений функции $y = f(x)$, заданных на отрезке $[\alpha, \beta]$;
 - 3) функция $x = g(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$;
 - 4) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$,
- то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

Пример. Вычислите определенный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение.

Сделаем подстановку $\sqrt{x} = t$, откуда $x = t^2$, $dx = 2t dt$. Тогда

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) \Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3)$$

Теорема. Если функции $U(x)$, $V(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU.$$

Пример. Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Решение.

Пусть $U = \arcsin x$, $dV = dx$, тогда $dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $V = x$.

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

II.III. Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь фигуры F , ограниченной кривой $y = f(x)$ в Декартовой системе координат, $f(x) \geq 0$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ вычисляется по формуле:

$$S(F) = \int_a^b f(x)dx.$$

Следствия:

Если $f(x) \leq 0$, то площадь вычисляется по формуле:

$$S(F) = - \int_a^b f(x)dx.$$

Если фигура F ограничена кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь фигуры F вычисляется по формуле:

$$S(F) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиком кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где значение параметра $\alpha \leq t \leq \beta$, вычисляется по формуле:

$$S(F) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиком кривой, заданной в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho(\varphi) \geq 0$ (для определенности), вычисляется по формуле:

$$S(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq 2\pi$. Для вычисления площади воспользуемся формулой

$S(F) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$. С учетом, что фигура эллипс симметрична, как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy , получим:

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 2ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислите площадь фигуры $\rho = \sin 2\varphi$, ограниченной одним лепестком.

Решение.

Формула площади фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в

полярной системе координат имеет вид $S(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$, поэтому:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \text{ (кв.ед.)}.$$

Вычисление объемов тел вращения.

Объем тела, образованного вращением непрерывной на отрезке $x \in [a, b]$ функции $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ вокруг оси Ox вычисляется по формуле:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Следствия:

Объем тела, образованного вращением непрерывной на отрезке $y \in [c, d]$ функции $x = f(y)$, $f(y) \geq 0$ вокруг оси Oy вычисляется по формуле:

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

Для вычисления объема тела, образованного вращением плоской фигуры F , ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем

$f_2(x) \geq f_1(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox справедлива формула:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

Если тело образовано вращением кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где значение параметра $\alpha \leq t \leq \beta$, вокруг оси Ox , где $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, его объем вычисляется по формуле:

$$V_{Ox} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt.$$

Объем тела, полученного вращением кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$ вокруг оси Oy , где $y(\gamma) = c$, $y(\delta) = d$, вычисляется по формуле:

$$V_{Oy} = \pi \int_{\gamma}^{\delta} x^2(t) y'(t) dt.$$

Объем тела, полученного вращением кривой $\rho = \rho(\varphi)$, заданной уравнением в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$V_{O\rho} = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение.

Формула для нахождения объема $V_{Ox} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt$.

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 (a(t - \sin t))' dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos^3 t) dt = 5a^3 \pi^2 \text{ (куб.ед.)}. \end{aligned}$$

Вычисление площадей поверхности тел вращения.

Площадь поверхности тела вращения кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ вокруг оси Ox :

$$P_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Следствия:

Если $f(x) \leq 0$, то формула площади поверхности примет вид:

$$P_{Ox} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Площадь поверхности тела вращения кривой $x = x(y)$ вокруг оси Oy , $y \in [c, d]$, находится по формуле:

$$P_{Oy} = 2\pi \int_c^d |x(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)} dy.$$

Площади поверхностей тел вращения кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, вокруг осей Ox и Oy находятся по формулам, соответственно:

$$P_{Ox} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

$$P_{Oy} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho(\varphi) \geq 0$, то площади поверхностей тел вращения вокруг оси $O\rho$ и угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ могут быть вычислены по формулам:

$$P_{O\rho} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

$$P_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) |\cos \varphi| \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Пример. Вычислите площадь поверхности вращения лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

Формула для вычисления площади имеет вид

$$P_{O\rho} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

$$\text{У нас } \rho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

$$\rho'(\varphi) = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi},$$

$$P_{O\rho} = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2 (-\cos \varphi)|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}) \text{ (кв.ед.)}.$$

Вычисление длины дуги.

Рассмотрим кривую Γ , заданную параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$.

Определение. Кривая Γ называется *регулярной*, если функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют непрерывные производные.

Длина регулярной кривой Γ , имеющая начало $M(a)$ и конец $M(b)$, определяется по формуле:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} dt.$$

Следствия:

Длина кривой, заданной в явном виде $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, находится по формуле:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Длина кривой, заданной уравнениями в полярной системе координат в виде $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $\theta_1 \leq \theta_2$, вычисляется по формуле:

$$l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Пример. Вычислите длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$ от точки $(0, 0)$ до точки $(4, 8)$.

Решение.

Находим по формуле $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (x^{\frac{3}{2}})'^2} dx =$
 $= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ (ед.)}.$

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ.

Задание 1. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx.$

Вариант 2. $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$

Вариант 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$

Вариант 4. $\int \frac{4\arctg x - x}{1 + x^2} dx.$

Вариант 5. $\int \frac{x}{(x^3 + 3x + 1)^5} dx.$

Вариант 6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$

Вариант 7. $\int \frac{x^2 + \ln^2 x}{x} dx.$

Вариант 8. $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$

Вариант 9. $\int \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx.$

Вариант 10. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$

Вариант 11. $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx.$

Вариант 12. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5} dx.$

Вариант 13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} dx.$

Вариант 14. $\int \frac{1 + \ln x - 1}{x - 1} dx.$

Вариант 15. $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$

Вариант 16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$

Вариант 17. $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$

Вариант 18. $\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

Вариант 19. $\int \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx.$

Вариант 20. $\int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

Вариант 21. $\int \frac{(\arcsin x)^4 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Вариант 22. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$

Вариант 23. $\int \frac{(\arcsin x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Вариант 24. $\int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

Вариант 25. $\int \frac{\arctg x + x}{1+x^2} dx.$

Задание 2. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int (4x+3) \sin 5x dx.$

Вариант 2. $\int \ln(x^2+4) dx.$

Вариант 3. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx.$

Вариант 4. $\int (1-6x)e^{2x} dx.$

Вариант 5. $\int (4x-2) \cos 2x dx.$

Вариант 6. $\int (x+5) \sin 3x dx.$

Вариант 7. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

Вариант 8. $\int (2-9x)e^{-3x} dx.$

Вариант 9. $\int \arctg \sqrt{5x-1} dx.$

Вариант 10. $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$

Вариант 11. $\int \ln(4x^2+1) dx.$

Вариант 12. $\int (2-3x) \sin 2x dx.$

Вариант 13. $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx.$

Вариант 14. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$

Вариант 15. $\int (4x+7) \cos 3x dx.$

Вариант 16. $\int (3x+4)e^{3x} dx.$

Вариант 17. $\int \arctg \sqrt{6x-1} dx.$

Вариант 18. $\int (5x+6) \cos 2x dx.$

Вариант 19. $\int (7x-10) \sin 4x dx.$

Вариант 20. $\int (3x-2) \cos 5x dx.$

Вариант 21. $\int (4x-3)e^{-2x} dx.$

Вариант 22. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

Вариант 23. $\int (2-4x) \sin 2x dx.$

Вариант 24. $\int \arctg \sqrt{3x-1} dx.$

Вариант 25. $\int (8-3x) \cos 5x dx.$

Задание 3. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx.$

Вариант 2. $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$

Вариант 3. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$

Вариант 4. $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2+x+1)} dx.$

Вариант 5. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$

Вариант 6. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$

Вариант 7. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$

Вариант 8. $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx.$

Вариант 9. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$

Вариант 10. $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$

Вариант 11. $\int \frac{x^3 + x + 2}{(x+1)x^3} dx.$

Вариант 12. $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{(x-1)(x-2)x} dx.$

Вариант 13. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx.$

Вариант 14. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-2)(x-4)x} dx.$

Вариант 15. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$

Вариант 16. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$

Вариант 17. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-3)(x-4)x} dx.$

Вариант 18. $\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx.$

Вариант 19. $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)x} dx.$

Вариант 20. $\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$

Вариант 21. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-2)(x-3)(x-4)} dx.$

Вариант 22. $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$

Вариант 23. $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$

Вариант 24. $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$

Вариант 25. $\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx.$

Задание 4. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Вариант 2. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$

Вариант 3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

Вариант 4. $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$

Вариант 5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$

Вариант 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$

Вариант 7. $\int \sqrt{4-x^2} dx.$

Вариант 8. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$

Вариант 9. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$

Вариант 10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx.$

Вариант 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

Вариант 12. $\int x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$

Вариант 13. $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$

Вариант 14. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(2-x^2)^3}} dx.$

Вариант 15. $\int \sqrt{16-x^2} dx.$

Вариант 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

Вариант 17. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$

Вариант 18. $\int \sqrt{256-x^2} dx.$

Вариант 19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx.$

Вариант 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$

Вариант 21. $\int \sqrt{25-x^2} dx.$

Вариант 22. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(8-x^2)^3}} dx.$

Вариант 23. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

Вариант 24. $\int x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$

Вариант 25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$

Задание 5. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{1+\cos x+\sin x}.$

Вариант 2. $\int \frac{\sin 3x dx}{5+3\sin x}.$

Вариант 3. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}.$

Вариант 4. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}.$

Вариант 5. $\int \frac{(\cos x - \sin x)dx}{(1+\sin x)^2}.$

Вариант 6. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x - \sin x)^2}.$

Вариант 7. $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}.$

Вариант 8. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}.$

Вариант 9. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}.$

Вариант 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}.$

Вариант 11. $\int \frac{\cos x dx}{1-\cos x+\sin x}.$

Вариант 12. $\int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$

Вариант 13. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$

Вариант 14. $\int \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$

Вариант 15. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$

Вариант 16. $\int \frac{dx}{\cos x(1 - \cos x)}.$

Вариант 17. $\int \frac{(1 + \cos x)}{1 + \cos x + \sin x}.$

Вариант 18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1 + \cos x)}.$

Вариант 19. $\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$

Вариант 20. $\int \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$

Вариант 21. $\int \frac{dx}{(1 - \cos x + \sin x)^2}.$

Вариант 22. $\int \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$

Вариант 23. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$

Вариант 24. $\int \frac{dx}{\sin x(1 - \sin x)}.$

Вариант 25. $\int \frac{\sin x dx}{((1 + \cos x - \sin x)^2)}.$

Задание 6. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

Вариант 1. $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$

Вариант 2. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$

Вариант 3. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

Вариант 4. $x = 4 - (y - 1)^2, x = y^2 - 4y + 3.$

Вариант 5. $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1.$

Вариант 6. $y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 2.$

Вариант 7. $y = x^2\sqrt{16 - x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 4.$

Вариант 8. $y = \arccos x, y = 0, x = 0.$

Вариант 9. $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1.$

Вариант 10. $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$

Вариант 11. $y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 6.$

Вариант 12. $y = x^2\sqrt{8-x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

Вариант 13. $y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 3$.

Вариант 14. $y = x^2\sqrt{4-x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 2$.

Вариант 15. $y = \sin x \cos^2 x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 16. $y = \cos x \sin^2 x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 17. $x = (y-2)^3, x = 4y-8$.

Вариант 18. $x = 24 - y^2, x = y^2 - 2y$.

Вариант 19. $x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 1$.

Вариант 20. $y = (x-1)^2, y^2 = x-1$.

Вариант 21. $y = \arctg x, y = 0, x = \sqrt{3}$.

Вариант 22. $y = x^2 \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 23. $y = \cos^5 x \sin^2 2x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 24. $y = \frac{1}{1+\cos x}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$.

Вариант 25. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0, x = 1$.

Задание 7. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

Вариант 1. $x = 16 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = 2, (x \geq 2)$.

Вариант 2. $x = \sqrt{2} \cos t, y = 2\sqrt{2} \sin t, y = 2, (y \geq 2)$.

Вариант 3. $x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, x = 2, (x \geq 2)$.

Вариант 4. $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t), y = 4, (0 < x < 8\pi, y \geq 4)$.

Вариант 5. $x = 2 \cos t, y = 6 \sin t, y = 3, (y \geq 3)$.

Вариант 6. $x = 16 \cos^3 t, y = \sin^3 t, x = 6\sqrt{3}, (x \geq 6\sqrt{3})$.

Вариант 7. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 3, (0 < x < 4\pi, y \geq 3)$.

Вариант 8. $x = 6 \cos t, y = 2 \sin t, y = \sqrt{3}, (y \geq \sqrt{3})$.

Вариант 9. $x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, x = 4, (x \geq 4)$.

Вариант 10. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), y = 3, (0 < x < 6\pi, y \geq 3)$.

Вариант 11. $x = 2\sqrt{2} \cos t, y = 3\sqrt{2} \sin t, y = 3, (y \geq 3)$.

Вариант 12. $x = 8 \cos^3 t, y = 8 \sin^3 t, x = 1, (x \geq 1)$.

Вариант 13. $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 9, (0 < x < 12\pi, y \geq 9)$.

Вариант 14. $x = \sqrt{2} \cos t, y = 4\sqrt{2} \sin t, y = 4, (y \geq 4)$.

Вариант 15. $x = 32 \cos^3 t, y = \sin^3 t, x = 4, (x \geq 4)$.

Вариант 16. $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 6, (0 < x < 12\pi, y \geq 6)$.

Вариант 17. $x = 9 \cos t, y = 4 \sin t, y = 2, (y \geq 2)$.

Вариант 18. $x = 8 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t, x = 3\sqrt{3}, (x \geq 3\sqrt{3})$.

Вариант 19. $x = 3 \cos t, y = 8 \sin t, y = 4, (y \geq 4)$.

Вариант 20. $x = 8(t - \sin t), y = 8(1 - \cos t), y = 12, (0 < x < 16\pi)$.

Вариант 21. $x = 24 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = 9\sqrt{3}, (x \geq 9\sqrt{3})$.

Вариант 22. $x = 6 \cos t, y = 4 \sin t, y = 2\sqrt{3}, (y \geq 2\sqrt{3})$.

Вариант 23. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 2, (0 < x < 4\pi, y \geq 2)$.

Вариант 24. $x = 3 \cos t, y = 8 \sin t, y = 4\sqrt{3}, (y \geq 4\sqrt{3})$.

Вариант 25. $x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, y = \sqrt{2}\sin^3 t, x = 2, (x \geq 2).$

Задание 8. Вычислите объемы тел, ограниченных поверхностями.

Вариант 1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, z = 1, z = 0.$

Вариант 2. $z = x^2 + 9y^2, z = 3.$

Вариант 3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$

Вариант 4. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

Вариант 5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z = 2, z = 0.$

Вариант 6. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = 9, z = 0, y \geq 0.$

Вариант 7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$

Вариант 8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

Вариант 9. $z = x^2 + 4y^2, z = 2.$

Вариант 10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0.$

Вариант 11. $z = x^2 + 5y^2, z = 5.$

Вариант 12. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$

Вариант 13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4.$

Вариант 14. $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4.$

Вариант 15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 5, z = 0.$

Вариант 16. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

Вариант 17. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$

Вариант 18. $x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0, y \geq 0.$

Вариант 19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 6, z = 0.$

Вариант 20. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$

Вариант 21. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$

Вариант 22. $z = 4x^2 + 9y^2, z = 6.$

Вариант 23. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$

Вариант 24. $z = 2x^2 + 18y^2, z = 6.$

Вариант 25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0.$

Задание 9. Вычислите длины дуг кривых, заданных уравнениями.

Вариант 1. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$

Вариант 2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$

Вариант 3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$

Вариант 4. $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

Вариант 5. $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

- Вариант 6.** $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.
- Вариант 7.** $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \frac{1}{4} \leq x \leq 1$.
- Вариант 8.** $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$.
- Вариант 9.** $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$.
- Вариант 10.** $y = 2 + chx, 0 \leq x \leq 1$.
- Вариант 11.** $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.
- Вариант 12.** $y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
- Вариант 13.** $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.
- Вариант 14.** $y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$.
- Вариант 15.** $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}$.
- Вариант 16.** $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- Вариант 17.** $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4$.
- Вариант 18.** $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \leq x \leq 1$.
- Вариант 19.** $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}$.
- Вариант 20.** $y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- Вариант 21.** $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
- Вариант 22.** $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{x - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$.
- Вариант 23.** $y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.
- Вариант 24.** $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
- Вариант 25.** $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Задание 10. Вычислите длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

- Вариант 1.** $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \leq t \leq \pi$.
- Вариант 2.** $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- Вариант 3.** $x = 3(2 \cos t - \cos 2t), y = 3(2 \sin t - \sin 2t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
- Вариант 4.** $x = 4(\cos t + t \sin t), y = 4(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2$.
- Вариант 5.** $x = 5(t - \sin t), y = 5(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi$.
- Вариант 6.** $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
- Вариант 7.** $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.
- Вариант 8.** $x = 10 \cos^3 t, y = 10 \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- Вариант 9.** $x = 3(\cos t + t \sin t), y = 3(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.
- Вариант 10.** $x = 8 \cos^3 t, y = 8 \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$.
- Вариант 11.** $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
- Вариант 12.** $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t), \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$.
- Вариант 13.** $x = 3, 5(2 \cos t - \cos 2t), y = 3, 5(2 \sin t - \sin 2t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.
- Вариант 14.** $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi$.

Вариант 15. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Вариант 16. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$.

Вариант 17. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 18. $x = 6(\cos t + t \sin t), y = 6(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi$.

Вариант 19. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 20. $x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 21. $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Вариант 22. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

Вариант 23. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), \pi \leq t \leq 2\pi$.

Вариант 24. $x = 8(\cos t + t \sin t), y = 8(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Вариант 25. $x = 2(2 \cos t - \cos 2t), y = 2(2 \sin t - \sin 2t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА.

Основная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 616 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 22-е изд., перераб. — СПб.: 2001. — 432 с.
3. Демидович Б.Л. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. - 13-е изд., испр. — М: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. — 624 с.

Дополнительная литература:

1. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. — М: Просвещение, 1973. — 255 с.
2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). 2-е изд., доп. — М: Высшая школа, 1994. — 206 с.

Интернет-ресурсы:

Бесплатный ресурс для студентов — <http://math24.ru/index.html>
Образовательный математический сайт — <http://www.exponenta.ru/>
Учебные материалы — <http://math.fiztex.ru/study/>